

# Vom klassischen Spielerruinproblem zu Spiele- Strategien

**Univ. Doz. Dr. Stefan Wegenkittl  
Fachhochschule Salzburg, Studiengang  
Telekommunikationstechnik und -systeme**

**[Stefan.Wegenkittl@fh-sbg.ac.at](mailto:Stefan.Wegenkittl@fh-sbg.ac.at)  
[Stefan.Wegenkittl.com](http://Stefan.Wegenkittl.com)**

# Idee: Stochastische Modellierung und Interpretation

Spiel = {

- ▶ Zustände: Feld der Spielfigur, Kapital der Mitspieler
- ▶ Regeln: „Wenn A am Zug ist, muss sie 1 mal Würfeln und ...“
- ▶ Parameter: 2 Mitspieler, Anfangskapital: 10 €
- ▶ Zufallsinput: 1 mal Würfeln, eine Münze werfen, 1.000.000 Transaktionen simulieren

}

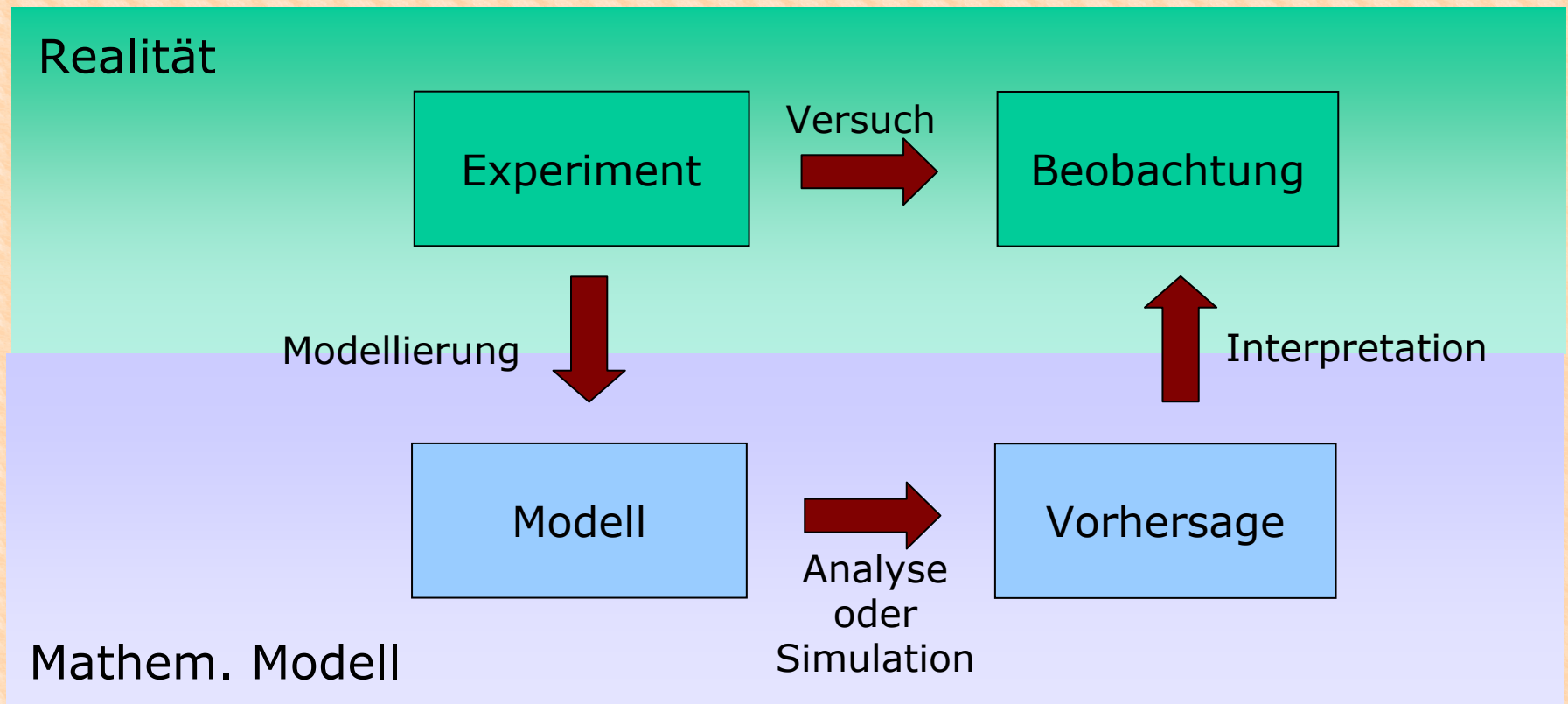
Prinzip: Zufall rein ➤ Zufall raus

Modellierung: Spiel = **Zufallsvariable** (Zufallsinput)

Mathematik der stochastischen Prozesse (Markovketten)



# Ebenenmodell



## Beispiel 1: „Gambler's Ruin“

- ▶ 2 Spieler
- ▶ A besitzt 1 €
- ▶ B besitzt 10 €
- ▶ Spiel: Münzwurf, bei
  - ▶ Kopf: A gibt 1 € an B
  - ▶ Zahl: B gibt 1 € an A
- ▶ Spielende: Ruin von A oder B

? Wie lange dauert das Spiel im Mittel  
? Wie sind die Gewinnchancen  
? Wie ist der zu erwartende Gewinn



## Beispiel 2: Das Teilungsproblem

- ▶ 2 Spieler: A,B
- ▶ Spieleinsatz pro Spieler: 100 €
- ▶ Pro Runde: Ein Münzwurf
  - ▶ Kopf ➤ 1 Punkt für A
  - ▶ Zahl ➤ 1 Punkt für B
- ▶ Wer zuerst 6 Punkte hat bekommt 200 €

? Wie lange dauert das Spiel im Mittel  
? Wie sind die Gewinnchancen  
? Wie ist der zu erwartende Gewinn



## Beispiel 2: Das Teilungsproblem

▶ Beim Stand

▶ A: 4 Punkte

▶ B: 3 Punkte

muss das Spiel abgebrochen werden...

? Wie soll der Einsatz aufgeteilt werden



# Klassische Interpretationen

## ▶ Sammlung:

- ▶ 70% : 30% „... aus dem Bauch heraus ...“
- ▶ 50% : 50% „eine faire Lösung gibt es nicht ...“
- ▶ 4/7:3/7 „im Verhältnis der gewonnenen Spiele“
- ▶ 6/11 : 5/11 „Nach spätestens 11 Spielen fertig ...“

## ▶ Begründungen:

- ▶ 15. Jhd.: „kaufmännischer Ansatz“
- ▶ 16. Jhd.: „noch zu gewinnende Spiele“
- ▶ Ende 16. Jhd.: Keine objektiv richtige Lösung möglich (Tartaglia)
- ▶ 14. Jhd.: Aufteilung des Einsatzes nach Gewinnchancen (Handschrift Nationalbibliothek Florenz)

▶ Heute: (Pascal-Fermat) nach Gewinnchancen: 11/16 : 5/16



# Mathematisches Modell: Markovkette

## ▶ Markovkette:

- ▶ Zukunft ist abhängig von Gegenwart und zufälligen Parametern ...
- ▶ ... aber nicht von der Art und Weise, wie Gegenwart erlangt worden ist.

## ▶ „Endliches Gedächtnis“

- ▶ Beispiel: Mensch ärgerer Dich nicht
- ▶ Beispiel Planspiel: Spielzustand durch eine Menge von Zahlen beschreibbar, die mit der Spieldauer nicht größer wird.

## ▶ Wichtiges Tool: Simulation





## Arbeitsgruppe Zufallszahlen

- ▶ pLab Server (Peter Hellekalek): <http://random.mat.sbg.ac.at>
- ▶ Idee: Simulation benötigt (Unmengen) an Zufallszahlen
  - ▶ Option Pricing: Integration in Dimension  $> 300$  (Monte Carlo)
  - ▶ Discrete Event Simulation (Wartezeiten, Partikelsysteme, ...)
  - ▶ ...
- ▶ Am Computer: Pseudozufallszahlengenerator:
  - ▶ 0011011110110100111001010111111010100001011010...

? Selbst mit großem Aufwand nicht von fairer Münze zu unterscheiden



# Der Gambling Test findet unfaire Münzen...

## Münz-Spiel mit Runden

- ▶ In jeder Runde kann Spieler
  - ▶ passen
  - ▶ auf Kopf **K** setzen
  - ▶ auf Zahl **Z** setzen
- ▶ Er gewinnt Münze wenn das **gleiche** Symbol geworfen wird.

## Strategie:

- ▶ Wenn Münze unfair ist, wird entweder **K** oder **Z** öfter vorkommen.
- ▶ Beobachte daher letzten 5 Ausfälle,  
setze auf jenes Symbol, das öfter vorgekommen
  - ▶ **KKKZK** → **K** setzen

Passen, wenn nicht eindeutig...



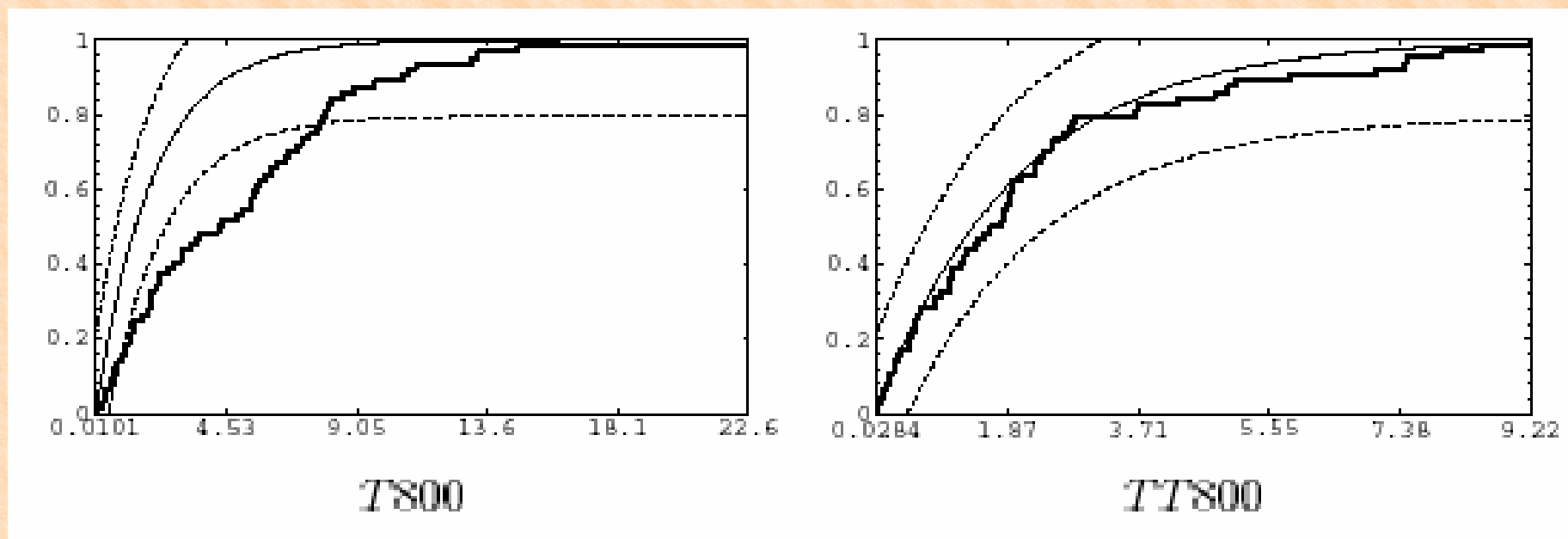
## ...im Hintergrund...

- ▶ Parameter in Praxis:
  - ▶ beobachte letzten 128 Spiele
  - ▶ spiele ca.  $2^{24}$  Runden
- ▶ Berechnung einer Markovkette mit einer  $2^{128} \times 2^{128}$  Matrix
  - ▶ Kovarianzen berechnen
  - ▶ Erwartungswerte berechnen
  - ▶ Schwache Inverse berechnen
- ▶ Man kann von jedem Ergebnis
  - ▶ „nach  $2^{24}$  Runden habe ich w mal gewonnen und p mal gepasst“  
sagen, wie wahrscheinlich es ist (**wenn die Münze fair ist**)!



## T800 ist keine faire Münze, TT800 schon!

- ▶ Gedächtnis 52, 32 Wiederholungen,  $2^{22}$  Runden



- ▶ T800: ein solches oder schlechteres Ergebnis nur in 1% der Fälle mit fairer Münze ▶ T800 wahrscheinlich nicht fair!

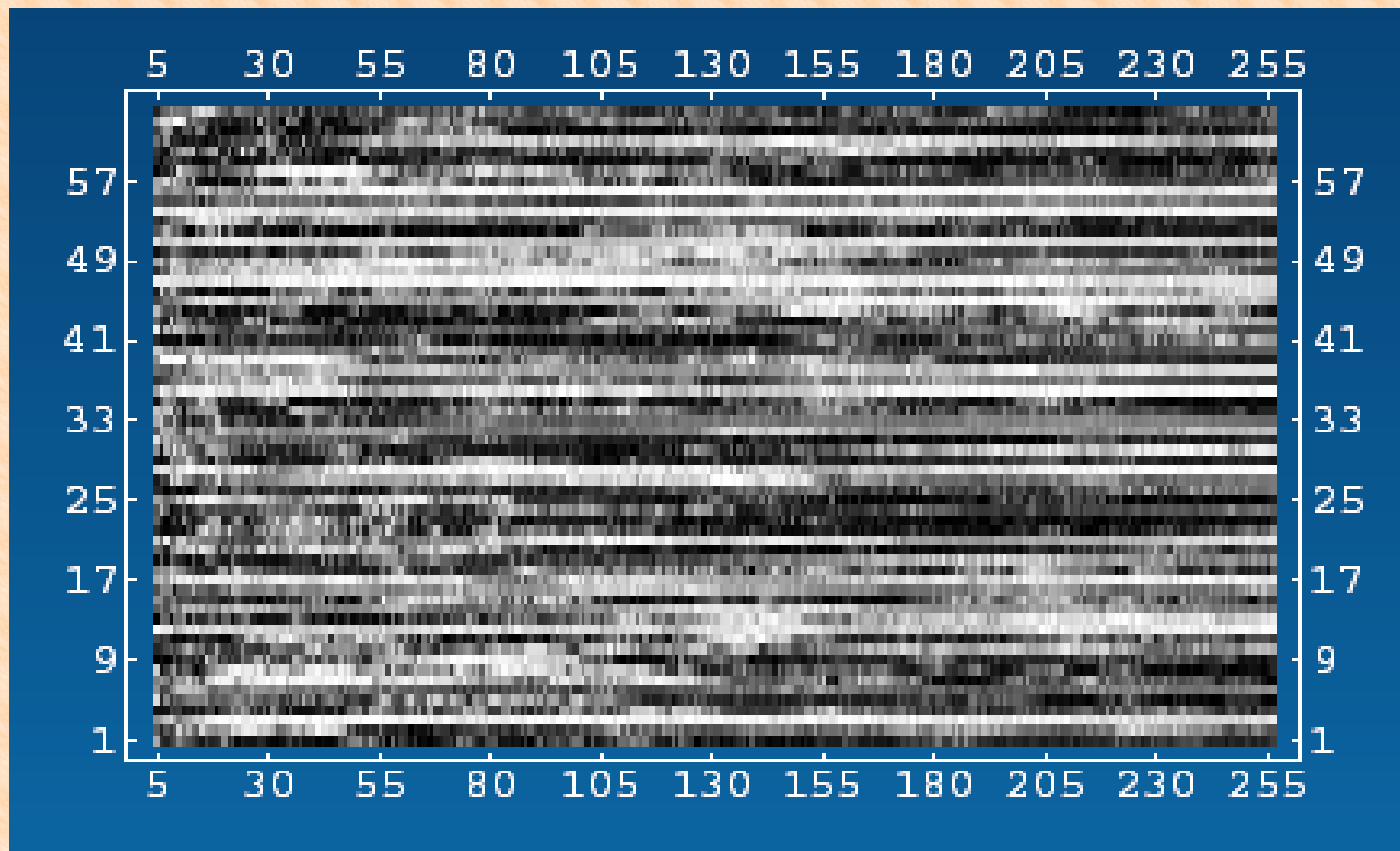
## Der Generator RNG 241 (PDH International)

- ▶ Ein externer Hardwaregenerator für die Erzeugung sicherer geheimer Schlüssel
- ▶ Verstärktes Quantenrauschen



## Gambling Tests: RNG241 verhält sich wie eine Münze

- ▶ Gedächtnis: 5-256, 64 Wiederholungen,  $2^{20}$  Runden



## Weiterlesen...

- ▶ NOEO Beitrag Heft 4/2003: S 42ff
- ▶ Peter Hellekalek and Stefan Wegenkittl. Empirical Evidence Concerning AES. ACM Trans. Model. Comput. Simul., 13(4):322–333, 2003.
- ▶ S. Wegenkittl. A generalized Phi-divergence for asymptotically multivariate normal models. Journal of Multivariate Analysis, 83:288–302, 2002.
- ▶ S. Wegenkittl. Entropy estimators and serial tests for ergodic chains. IEEE Transactions on Information Theory, 47(6):2480–2489, Sep 2001.
- ▶ [www.stefan.wegenkittl.com](http://www.stefan.wegenkittl.com)

**Danke für die Aufmerksamkeit!**

